التكامل غير المحدد: إن عملية التكامل هي عملية عكسية لعملية الاشتقاق.

تعريف التابع الأصلي: نقول عن التابع $F(x)$ أنه تابع أصلي للتابع f على المجال I إذا كان

$$F'(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in I$$

ونكتب

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

نلاحظ أنه إذا كان F تابع أصلي لـ f فإن: $F(x)+C$ (حيث C ثابت كيفي) هو أيضاً تابع أصلي لـ f.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

يسمى C ثابت المكاملة.

إذا كان F و G تابعين أصليين لـ f على المجال I فإن: $F-G=C$ حيث $C \in \mathbb{R}$

وذلك لأن:

$$F'(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in I$$

$$G'(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in I$$

$$\Rightarrow F' - G' = 0 \Rightarrow (F-G)' = 0 \Rightarrow F - G = C$$

$$(\alpha . f)' = \alpha . f'$$

بالاستفادة من خواص الاشتقاق نجد أن:

① $$\int (f(x) \mp g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx$$

② $$\int \alpha . f(x)\,dx = \alpha . \int f(x)\,dx \; ; \; \alpha \in R$$

ملاحظات :

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(f(x)+c\right)' = f(x)$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) =$$

$$\int d\,f(x) = f(x)+c$$

- إن التكامل غير المحدد للتابع f هو عبارة عن حزمة من المنحنيات بحيث كل منحني منها يتم الحصول عليه [illegible] منحني آخر بانسحاب للأعلى أو الأسفل على المحور y.

وعلى سبيل المثال إذا كان $f(x)=2x$

فإن: $f(x)=x^2+c$

- هل التابع الأصلي لأي تابع ما موجود؟

الجواب: في الحالة العامة لا.

- إذا كان f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ فإن: f يملك تابع أصلي

[illegible]

* جدول التكاملات الأساسية :

① $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; ; \alpha \neq -1$

• ② $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\hookrightarrow \int \frac{f'}{f}dx = \ln|f| + C$

③ $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

$\hookrightarrow \int e^{\alpha x+\beta}dx = \frac{e^{\alpha x+\beta}}{\alpha} + C$

④ $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \; ; a>0 \; , a \neq 1$

⑤ $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\hookrightarrow \int \sin(\alpha x+\beta)dx = \frac{-\cos(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C$

⑥ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

(tg)

• ⑦ $\int \tan x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$

أو $= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$

$= \ln|\sec x| + C$

(ctg)

⑧ $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$= \ln|\sin x| + C$

⑨ - $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

⑩ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

(4)

$$sh\,x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$ch\,x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

(11) $\int sh\,x\,dx = ch\,x + c$

(12) $\int ch\,x\,dx = sh\,x + c$

tan(h) [illegible] الظل القطعي

(13) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + c$

(14) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + c$

(15) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$

(16) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$

(17) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

(19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \mp a^2} \right| + c$

(20) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + c$

(21) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx =$

(22) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$

تمارين:

① $\int \frac{2x}{(2x+1)^2}\,dx = \int \frac{2x+1-1}{(2x+1)^2}\,dx$

$= \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2}\,dx - \int \frac{dx}{(2x+1)^2}$

نضرب ونقسم على 2 $= \int \frac{1}{(2x+1}\,dx - \int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx - \int (2x+1)^{-2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln|2x+1| - \frac{(2x+1)^{-1}}{-1\times 2} + C$

$= \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{2(2x+1)} + C$

② $\int \frac{1-x}{1+x}\,dx = \int \frac{1}{1+x}\,dx - \int \frac{x}{1+x}\,dx$

$= \ln|1+x| - \int \frac{x+1-1}{1+x}\,dx$

$= \ln|1+x| - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$

$= \ln|1+x| - x + \ln|1+x| + C$

$= 2\ln|1+x| - x + C$

$\alpha x+\beta$ →

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\alpha \cdot \ln a}$$

③ $$\int 5^{3x+1} dx = \frac{5^{3x+1}}{3 \cdot \ln 5} + C$$

④ $$\int \cos(2x+5)\, dx = \frac{\sin(2x+5)}{2} + C$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

⑤ $$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4-1}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int (x^2-1)\, dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

نضرب 5 ونقسم على 5   نطرح 2 ونضيف 2

⑥ $$\int x \cdot \sqrt{5x-2}\, dx = \frac{1}{5} \int 5x \sqrt{5x-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{5} \int (5x - 2 + 2) \sqrt{5x-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{5} \int (5x-2)^{\frac{3}{2}} + 2(5x-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}{5 \times \frac{5}{2}} + 2 \frac{(5x-2)^{\frac{3}{2}}}{5 \times \frac{3}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{2}{125} (5x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{75} (5x-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(7) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1-\cos x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$

(8) $\int \sin x \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$= \int \sin \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = \sqrt{2} \int \sin x \cdot \cos x\, dx$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

$= \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{2} + C$

(9) $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx = \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2)\, dx$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 + 2 \right) dx$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

$= \tan x - \cot x + C$

المحاضرة (1) تكامل (2)

* طريقة تغيير المتحول (التعويض): يمكن تغيير المتحول x بالتكامل $\int f(x)\,dx$ إلى متحول جديد t بوضع $x=\varphi(t)$ حيث φ قابل للاشتقاق ومشتقه مستمر ويملك تابع عكسي عندئذٍ يكون

$$① \longrightarrow \left(\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\right)$$

بعد إيجاد التكامل نعود بالمتحول (t) إلى المتحول x الأساسي
- يمكن أن نفرض $t=\varphi^{-1}(x)$

لإثبات العلاقة ①؟
لنفرض أن F هو تابع أصلي ناتج عن التكامل الأيمن أي

$$\frac{dF}{dt} = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

يجب أن نتأكد أن $\frac{dF}{dx} \overset{?}{=} f(x)$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$= f(x)$$

تمارين:

$$① \int\frac{dx}{x+x\ln(x)} = \int\frac{dx}{x(1+\ln(x))}$$

نفرض $t=\ln(x) \Longleftrightarrow dt=\frac{1}{x}dx \Longleftarrow$ نعوض

$$I=\int\frac{dt}{(1+t)} = \ln|1+t|+c$$

$$=\ln|1+\ln(x)|+c$$

(9)

المعاصرة (1)   تحليل (2)

② $\int \frac{e^{2\arctan x}}{1+x^2}\,dx$ نفرض $t=\arctan x$

$\Rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ نعوض بالتكامل

$I=\int e^{2t}\,dt$

$= \frac{e^{2t}}{2} + c = \frac{e^{2\arctan x}}{2} + c$

③ $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}$ نفرض $t=e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow dt = (\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})\,dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})\,dx$

$I=\int \frac{2\,dt}{t} = 2\ln|t| + c$ نعوض ⇐

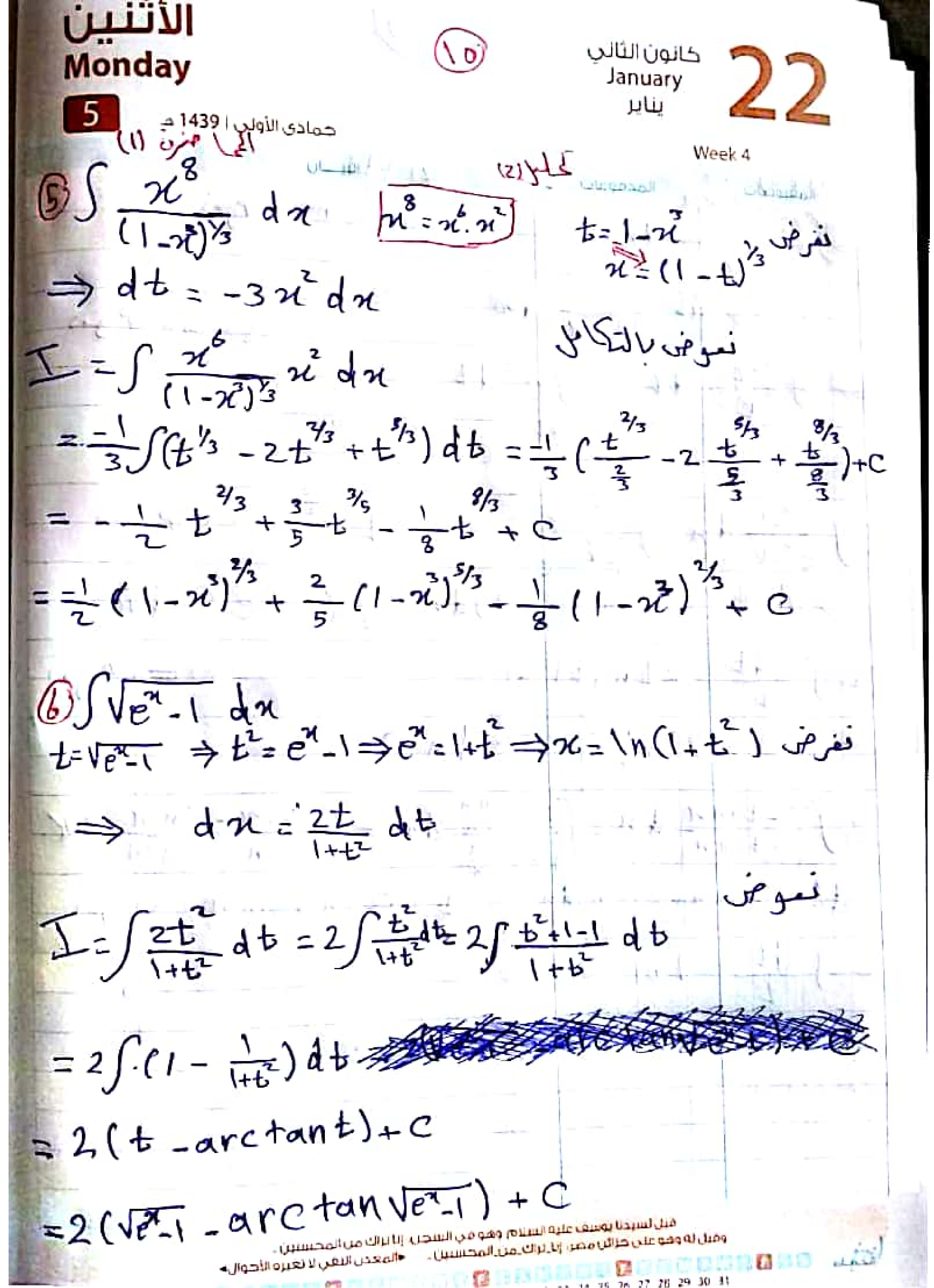
$= 2\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}| + c$

④ $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = \int \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\,dx = \int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$

$dt = (-\sin x+\cos x)\,dx \Leftarrow t=\cos x+\sin x$ نفرض

$I=\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$ نعوض

$= \ln|\cos x+\sin x| + c$



(١٥)

الجا مزن (1) — تكامل (2)

⑤ $\int \frac{x^8}{(1-x^3)^{1/3}}\,dx$ $\quad x^8 = x^6 . x^2$

نفرض $t = 1 - x^3$ $\quad x^3 = (1-t)$

$\Rightarrow dt = -3x^2\,dx$

نعوض بالتكامل

$I = \int \frac{x^6}{(1-x^3)^{1/3}}\, x^2\,dx$

$= \frac{-1}{3}\int (t^{-1/3} - 2t^{2/3} + t^{5/3})\,dt = \frac{-1}{3}\left(\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} - 2\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}} + \frac{t^{8/3}}{\frac{8}{3}}\right) + C$

$= -\frac{1}{2}t^{2/3} + \frac{3}{5}t^{5/3} - \frac{1}{8}t^{8/3} + C$

$= \frac{-1}{2}(1-x^3)^{2/3} + \frac{2}{5}(1-x^3)^{5/3} - \frac{1}{8}(1-x^3)^{2/3} + C$

⑥ $\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$

نفرض $t = \sqrt{e^x-1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + t^2 \Rightarrow x = \ln(1+t^2)$

$\Rightarrow dx = \frac{2t}{1+t^2}\,dt$

نعوض :

$I = \int \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt$

$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$= 2(t - \arctan t) + C$

$= 2(\sqrt{e^x-1} - \arctan\sqrt{e^x-1}) + C$